Les essentiels en mathématiques pour la terminale ES ou L(spé Maths)

Pour bien démarrer la classe de terminale, il est fondamental que certaines notions de base soient acquises.
Vous trouverez ci-dessous différents thèmes de mathématiques à travailler durant les vacances. Les références se rapportent au livre de 1ière ES/L.

Des documents et le corrigé des exercices seront prochainement visibles sur ENTEA et sur le site du lycée MARC BLOCH.

Vos connaissances seront vérifiées dès le début de l'année scolaire.

CALCULS ALGEBRIQUES

Savoir développer un produit et réduire une expression algébrique.

POURCENTAGES

Savoir calculer un pourcentage (t% d'un nombre) et savoir calculer une grandeur augmentée ou diminuée de t% : voir cours et savoir-faire 1 et 2

.

1 Calculer un pourcentage

Dans un lycée, il y a 450 élèves et 30 % de ces élèves sont inscrits en classe de 1re ES.

1. Combien d'élèves sont inscrits en classe de 1re ES ?

2. Il y a 81 filles inscrites en 1re ES. Elles représentent 25 % du nombre total de filles du lycée. Combien de filles sont inscrites au lycée ?

Solution

1. Le nombre n d'élèves inscrits en classe de 1re ES vérifie l'égalité $\frac{n}{450} = \frac{30}{100}$,
d'où $n = 450 \times 0{,}3 = 135$. Il y a 135 élèves inscrits en 1re ES.

2. L'ensemble de référence est l'ensemble des filles du lycée. Soit x le nombre de filles.
On a : $\frac{81}{x} = \frac{25}{100}$, donc $x = \frac{100 \times 81}{25} = 324$. Il y a 324 filles dans le lycée.

2 Calculer une évolution exprimée en pourcentage

1. Un objet coûte 25 € ; il diminue de 12 %. Quel est son nouveau prix ?

2. Dans un théâtre, entre mardi et mercredi, le nombre de spectateurs a augmenté de 20 %. Il y a 468 spectateurs le mercredi. Quel était le nombre de spectateurs le mardi ?

Solution

1. Diminuer de 12 % un prix, c'est multiplier ce prix par le coefficient multiplicateur $1 - \frac{12}{100}$.
Le nouveau prix est $25 \times \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 25 \times 0{,}88 = 22$ €.

2. Soit x le nombre de spectateurs du mardi.
Augmenter de 20 % le nombre de spectateurs, c'est le multiplier par 1,2.
Donc $x \times 1{,}2 = 468$, d'où $x = \frac{468}{1{,}2} = 390$. Il y avait 390 spectateurs le mardi dans ce théâtre.

Exercices n°6 et 7

6 Il y a 580 élèves dans un lycée.
15 % de ces élèves sont des demi-pensionnaires.
Quel est le nombre de demi-pensionnaires dans ce lycée ?

7 Le prix d'un article est 150 € hors taxes.
Calculer le montant de la TVA :
a. pour un taux de TVA de 19,6 % ;
b. pour un taux de TVA de 5 %.

et n° 54 à 57

54 Les prix ont augmenté de 10 %.
Un objet coûtait avant l'augmentation 230 €.
Combien coûte-t-il maintenant ?

55 Les prix ont augmenté de 20 %.
Un objet coûte maintenant 240 €.
Combien coûtait-il avant l'augmentation ?

56 Le prix toutes taxes comprises (TTC) est le prix hors taxes (HT) augmenté de la TVA. Un article coûte 125 € hors taxes.
Quel est son prix TTC avec une TVA de 19,6 % ?

57 Le taux de TVA est de 19,6 %.
Le prix TTC d'un objet est de 299 €.
Quel est son prix hors taxes ?

LE SECOND DEGRE

Connaître le sens de variation et la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré
Savoir résoudre une équation du second degré .
Savoir étudier le signe d'un polynôme du second degré .
Exercices n° 29, 30

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 - 9$.
1. Donner les variations de f.
2. Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole représentant f dans le plan ?

30 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+5)^2 + 10$.
1. Donner les variations de f.
2. Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole représentant f dans le plan ?

n° 40, 41 et 42

Dans les exercices 40 à 44, résoudre les équations données.

AIDE : Le calcul du discriminant n'est pas toujours indispensable !

40 **a.** $15x^2 + x - 6 = 0$. **b.** $x^2 - 16x = 0$.
c. $x^2 - 2x - 15 = 0$. **d.** $(2x+9)(x-8) = -72$.
e. $5x^2 - 7x + 6 = 0$.

→ Pour vous aider **Savoir-faire 2**, p. 61

41 **a.** $4x^2 - 20x + 21 = 0$. **b.** $(2x+9)(x-8) = 0$.
c. $4x^2 - 7x - 2 = 0$. **d.** $x^2 + 6 = 0$.
e. $(x+3)(x-2) = 13x - 17$.

→ Pour vous aider **Savoir-faire 2**, p. 61

42 **a.** $x^2 + 6x + 9 = 0$. **b.** $2x(x+5) = 75 + x^2$.
c. $3(x+1)^2 - 5(x+1)^2 = 44$. **d.** $16x^2 - 56x + 49 = 0$.
e. $x^2 - 3x + 1 = 0$.

→ Pour vous aider **Savoir-faire 2**, p. 61

n° 19 et 20

n° 19 : Déterminer le signe des polynômes, selon les valeurs du réel x.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 24$
b) $g(x) = x^2 + x + 6$

c) $h(x) = 9x^2 + 6x + 1$
d) $j(x) = x^2 + 2x$

n° 20 : Déterminer le signe des polynômes, selon les valeurs du réel x.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
b) $g(x) = 12x^2+5x+11$
c) $h(x) = (x-1)(x-2)$
d) $k(x) = -2x^2 - 12x - 18$

DROITES

Savoir lire le coefficient directeur d'une droite dans un repère.
Savoir tracer une droite d'équation donnée (y = ax + b) ou une droite dont on connaît les coordonnées d'un point et le coefficient directeur.
Savoir trouver l'équation d'une droite dont on connaît les coordonnées d'un point et le coefficient directeur .

FONCTIONS USUELLES

Connaître le sens de variation et la représentation graphique des fonctions affines, « carré », « inverse », « cube ».

DERIVATION

Connaître les dérivées des fonctions usuelles
Connaître les formules de dérivation de u + v, ku, uv, $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ et savoir les utiliser

2 Fonction dérivée

Fonction dérivée d'une fonction donnée

Vocabulaire

On dit fonction dérivée de f ou, plus simplement, dérivée de f.

Définition

Si f est dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$. On veut déterminer si elle est dérivable en a. Pour cela, on étudie le rapport $r(h) = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$.
La limite de $r(h)$ quand h tend vers 0 est $2a$.
La fonction g est donc dérivable pour toute valeur a de $\mathbb{R}$ et $g'(a) = 2a$.
La fonction dérivée g' de g est définie par $g'(x) = 2x$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Dérivées des fonctions usuelles

Point Histoire

Leibniz (1646-1716), philosophe et mathématicien allemand, et **Newton** (1642-1727), savant britannique connu pour ses travaux sur la gravitation universelle, ont inventé le calcul des dérivées.

Propriété 1 **Fonctions affines**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, avec m et p réels, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = m$ pour tout x réel.

En effet si $f(x) = mx + p$, alors $f(a+h) - f(a) = mh$.
Le taux d'accroissement $r(h)$ entre a et $a + h$ est donc $r(h) = m$.
$r(h)$ est indépendant de h, donc sa limite quand h tend vers 0 est m ; d'où $f'(x) = m$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exemple : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 7$, alors $f'(x) = -2$.

Cas particuliers :

Fonctions constantes

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$, avec p réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$.

Fonctions linéaires

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$, avec m réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = m$.

Propriété 2 **Fonctions puissances**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, avec n entier naturel non nul, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$, pour tout x réel.

Cas particuliers :

Fonction carré

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

Ce résultat a été établi dans l'exemple du paragraphe précédent.

Fonction cube

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$.

Propriété 3 **Fonction inverse**

La fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ pour tout x réel non nul.

Propriété 4 **Fonction racine carrée**

La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout réel x tel que $x > 0$.

Savoir-faire 3

Calculer des nombres dérivés pour les fonctions usuelles

➤ Voir les exercices 71 à 74

1. Calculer le nombre dérivé des fonctions suivantes en $x = -2$, puis en $x = \frac{1}{2}$:

a. $f(x) = x^2$; **b.** $g(x) = x^3$; **c.** $h(x) = \frac{1}{x}$; **d.** $p(x) = -3x - 5$.

2. Calculer le nombre dérivé de la fonction k, telle que $k(x) = \sqrt{x}$, en 4 puis en 5.

Méthode

Pour calculer un nombre dérivé en a, on détermine d'abord la fonction dérivée, puis on remplace la variable par la valeur de a.

Solution

1. a. $f'(x) = 2x$, donc $f'(-2) = 2 \times (-2) = -4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

b. $g'(x) = 3x^2$, donc $g'(-2) = 3 \times (-2)^2 = 12$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

c. $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $h'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$.

d. $p'(x) = -3$, donc $p'(-2) = -3$ et $p'\left(\frac{1}{2}\right) = -3$.

2. $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $k'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ et $k'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

3 Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

À noter

Cette propriété s'étend à une somme de plusieurs fonctions.

Propriété La somme $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.

Exemple : Soit f la fonction définie, pour $x>0$, par $f(x)=x+\sqrt{x}$.
La fonction f est la somme de deux fonctions u et v, définies par $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
Elle est dérivable pour $x>0$ et $f'(x)=u'(x)+v'(x)$.
Or $u'(x)=1$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x>0$.

À noter

On dit que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées. En revanche, la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Propriété Le produit uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-3x)(5x+2)$.
La fonction f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x)=2-3x$ et $v(x)=5x+2$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.
Or $u'(x)=-3$ et $v'(x)=5$, donc :

$$f'(x)=-3\times(5x+2)+(2-3x)\times 5=-15x-6+10-15x=-30x+4.$$

Propriété Le produit ku, avec k constante réelle, est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$.

On applique le résultat précédent, en remarquant que la dérivée d'une fonction constante est nulle.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=7x^2$.
La fonction f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x)=7$ et $v(x)=x^2$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=7\times(2x)=14x$.

Propriété Le carré u^2 de u, est dérivable sur I et $(u^2)'=2uu'$.

On utilise la formule donnant la dérivée d'un produit avec $u=v$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^3+1)^2$.
La fonction f est le carré de la fonction u définie par $u(x)=x^3+1$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2(x^3+1)\times 3x^2=6x^2(x^3+1)$.

Propriété L'inverse $\frac{1}{v}$ de v, avec $v(x)\neq 0$ sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.

Cette propriété est admise ici et sera démontrée dans l'exercice 139.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1{,}5\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2x-3}$.
La fonction f est l'inverse de la fonction v définie par $v(x)=2x-3$.
Elle est dérivable sur $]1{,}5\,;+\infty[$.
$f'(x)=-\frac{v'(x)}{(v(x))}$ et $v'(x)=2$, donc $f'(x)=-\frac{2}{(2x-3)^2}$.

Propriété Le quotient $\frac{u}{v}$, avec $v(x)\neq 0$ sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$.
La fonction f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x)=2x+1$ et $v(x)=x-1$.
Elle est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$.
Or $u'(x)=2$ et $v'(x)=1$, donc :

$$f'(x)=\frac{2\times(x-1)-(2x+1)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Savoir-faire 5 Calculer la dérivée d'une fonction

➤ Voir les exercices 98 à 105

1. Calculer la dérivée de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 5x^3 - 2x + 3$.

2. Soit u et v les fonctions définies $\mathbb{R}$ par $u(x) = -2x - 1$ et $v(x) = 3x^2 + 1$.

Calculer la dérivée de uv, celle de u^2 et celle de $\frac{1}{v}$.

3. Calculer la dérivée de la fonction k définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $k(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

Solution

1. La fonction p est une somme de fonctions dérivables n, s et t définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$n(x) = 5x^3,\ s(x) = -2x \text{ et } t(x) = 3.$$

Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et p' est la somme des dérivées de ces fonctions :

$$p'(x) = n'(x) + s'(x) + t'(x).$$

Or $n'(x) = 15x^2$, $s'(x) = -2$ et $t'(x) = 0$. D'où $p'(x) = 15x^2 - 2$.

2. On calcule d'abord u' et v' : $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 6x$.

$(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = (-2) \times (3x^2 + 1) + (-2x - 1) \times 6x = -18x^2 - 6x - 2$.

$(u^2)'(x) = 2u(x) \times u'(x) = 2(-2x - 1) \times (-2) = 8x + 4$.

Les dérivées de uv et de u^2 peuvent s'obtenir en développant d'abord les expressions du produit et du carré. La fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'où $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}$.

3. La fonction k est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x + 1$.

Par suite, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

D'où $k'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2(x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$.

Méthode
Pour déterminer la dérivée d'une fonction, on reconnaît d'abord la forme de cette fonction puis on utilise les formules de dérivation.

Conseil
Quand on dérive un produit uv, chercher d'abord si l'on peut simplifier ce produit.

Exercices n° 23 à 33.

Pour les exercices 23 à 40, calculer la dérivée de la fonction donnée.

23 $f(x) = -7x^2$.

24 $f(x) = -500x^3$.

25 $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$.

26 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

27 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

28 $f(x) = \frac{1-4x}{3x+5}$.

29 $f(x) = x^3 + 5$.

30 $f(x) = 2\sqrt{x} + x$.

31 $f(x) = x\sqrt{x}$.

32 $f(x) = 7 + \frac{1}{x}$.

33 $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$.

34 $f(x) = 0{,}03x^2 + 9$.

35 $f(x) = -x^2 + x + \frac{1}{x}$.

36 $f(x) = x + 20 + \frac{8\,000}{x}$.

37 $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

38 $f(x) = (2x+1)(4-x)$.

39 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

40 $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}1x^2 - 2x + 0{,}3$.

SUITES

Savoir calculer les termes d'une suite récurrente .

49 La suite u est définie par $u_0 = 2$ et par une relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n.
Pour chacune des suites suivantes, calculer u_1, u_2 et u_3.

1. $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

2. $u_{n+1} = 1 - (u_n)^2$.

3. $u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n}{1 - u_n}$.

4. $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + 1$.

Savoir démontrer qu'une suite est arithmétique ou qu'une suite est géométrique.