Fiche technique : second degré

1 Fonction polynôme de degré 2

Propriété 1

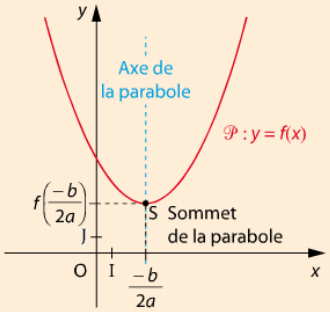
Soit la fonction f polynôme de degré 2, $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b, c réels, $a \neq 0$).

Elle est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ admet un axe de symétrie.

Si $a > 0$

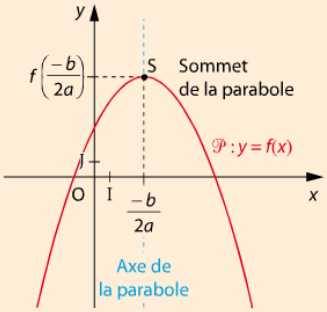
$\mathcal{P}$ est « orientée vers le haut »



x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗

Si $a < 0$

$\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas »



x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘

2 Variations d'une fonction polynôme de degré 2

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$. Dresser le tableau de variation de la fonction f. Contrôler graphiquement les résultats à l'aide de la calculatrice.

Solution

f est une fonction polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme en x^2 est 3.

La parabole représentative de la fonction f est donc « tournée vers le haut ».

Le sommet S de cette parabole a pour abscisse

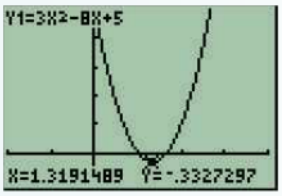
$x_S = -\dfrac{-8}{2 \times 3} = \dfrac{4}{3}$ et pour ordonnée $y_S = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$.

On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{4}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - 8x + 5$	↘	$-\dfrac{1}{3}$	↗

On entre la fonction f sur la calculatrice et on choisit une fenêtre adaptée aux coordonnées trouvées pour S.

L'outil **Trace** permet de contrôler les coordonnées du sommet.



2 Forme canonique et équation $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété 2

Pour tout trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout x réel, $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
L'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée **forme canonique** du trinôme.

Dans la forme canonique ci-dessus, les coefficients α et β sont l'abscisse et l'ordonnée du sommet S de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Définition et propriété 3

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $ax^2 + bx + c$
Si $\Delta > 0$	a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Si $\Delta = 0$	a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
Si $\Delta < 0$	n'a pas de solution réelle	

Exercice 1 :

Déterminer la forme canonique et dresser le tableau de variations en justifiant de chacune des fonctions trinômes du second degré *f* définies ci-dessous sur **R**.

$f_1 : x \longrightarrow 8x^2 - 2x - 9$

$f_2 : x \longrightarrow 2x - 3 - x^2$

$f_3 : x \longrightarrow -4x^2 - 9x - 2$

$f_4 : x \longrightarrow 5 + 3x + 10x^2$

$f_5 : x \longrightarrow 4x^2 + 9x - 7$

Exercice 2 :

Déterminer le discriminant et les racines éventuelles de chacune des fonctions trinômes du second degré *f* définies ci-dessus sur **R**. Quelle conséquence graphique en tire-t-on ?

Solution 1 *Le tableau de variations de $f : x \longmapsto 8x^2 - 2x - 9$ est le suivant.*

car $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{8}$	$+\infty$
variations de f	↘	$-\frac{73}{8}$	↗

La forme canonique est :

$$f(x) = 8\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{73}{8}$$

$D = 292 \Rightarrow 2$ *racines*

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{292}}{16} = \frac{1 - \sqrt{73}}{8}$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{292}}{16} = \frac{1 + \sqrt{73}}{8}$$

Solution 2 *Le tableau de variations de $f : x \longmapsto -x^2 + 2x - 3$ est le suivant.*

car $a < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f	↗	-2	↘

La forme canonique est :

$$f(x) = -(x - 1)^2 - 2$$

$D = -8 \Rightarrow$ *pas de racines*

Solution 3 *Le tableau de variations de $f : x \longmapsto -4x^2 - 9x - 2$ est le suivant.*

car $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$
variations de f	↗	$\frac{49}{16}$	↘

La forme canonique est :

$$f(x) = \frac{49}{16} - 4\left(x + \frac{9}{8}\right)^2$$

$D = 49 \Rightarrow 2$ *racines*

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{49}}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{9 + \sqrt{49}}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$$

Solution 4 *Le tableau de variations de $f : x \longmapsto 10x^2 + 3x + 5$ est le suivant.*

car $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{20}$	$+\infty$
variations de f	↘	$\frac{191}{40}$	↗

La forme canonique est :

$$f(x) = 10\left(x + \frac{3}{20}\right)^2 + \frac{191}{40}$$

$D = -191 \Rightarrow$ *pas de racines*

Solution 5 *Le tableau de variations de $f : x \longmapsto 4x^2 + 9x - 7$ est le suivant.*

car $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$
variations de f	↘	$-\frac{193}{16}$	↗

La forme canonique est :

$$f(x) = 4\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 - \frac{193}{16}$$

$D = 193 \Rightarrow 2$ *racines*

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{193}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-9 + \sqrt{193}}{8}$$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes ; 7 d'entre elles pouvant et devant l'être sans utiliser le discriminant :

1. $x^2 - 3x - 10 = 0$
2. $3x^2 - 5x = 0$
3. $-2x^2 + 3x - 7 = 0$
4. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
5. $9x^2 - 25 = 0$
6. $5x^2 - 10x + 2 = 0$
7. $(2x+3)(3x-1) = 0$
8. $100x^2 = 36$
9. $-3x^2 + 9x - 3 = -2x^2 + 2x - 2$
10. $-15x^2 = x + 2$
11. $(5x+10)(1-6x) - (3x+7)(5x+10) = 0$
12. $2x - 7 + 5x^2 = 0$
13. $(7x+1)^2 = (4-8x)^2$
14. $(3x+7)^2 = 8x^2 + 40x$
15. $(2x^2 - x + 3)(-5x - 1) = 0$
16. $-2x^2 + 3x = (x-2)^2$

1. Avec Δ. Les solutions sont -2 et 5.

2. Sans Δ. Les solutions sont 0 et $\frac{2}{3}$.

3. Avec Δ. Cette équation n'a pas de solution.

4. Sans Δ. La solution est $\frac{1}{2}$.

5. Sans Δ. Les solutions sont $-\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

6. Avec Δ. Les solutions sont $\frac{5-\sqrt{13}}{5}$ et $\frac{5+\sqrt{13}}{5}$.

7. Sans Δ. Les solutions sont $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

8. Sans Δ. Les solutions sont $-\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{5}$.

9. Avec Δ. Les solutions sont $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

10. Avec Δ. Cette équation n'a pas de solution.

11. Sans Δ. Les solutions sont -2 et $-\frac{2}{3}$.

12. Avec Δ. Les solutions sont $-\frac{7}{5}$ et 1.

13. Sans Δ. Les solutions sont $\frac{1}{5}$ et 5.

14. Avec Δ. Cette équation n'a pas de solution.

15. Avec Δ. La solution est $-\frac{1}{5}$.

16. Avec Δ. Les solutions sont $\frac{4}{3}$ et 1.

3 Signe d'un trinôme de degré 2

Propriété 4

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et Δ son discriminant.

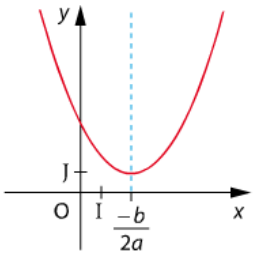
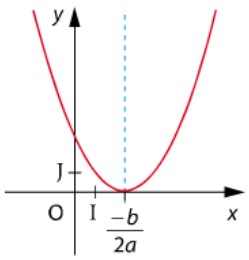
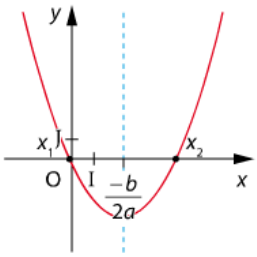
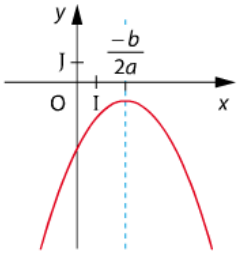
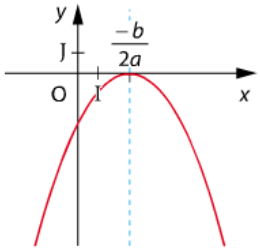
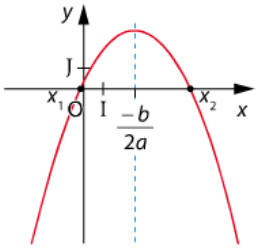
- Si $\Delta < 0$, le trinôme a même signe que a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme a même signe que a pour tout réel x et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2. Si $x_1 < x_2$, le tableau de signes du trinôme est :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé à celui de a	0	signe de a	

On retient souvent cette propriété sous la forme condensée suivante :

« $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines s'il y en a. »

On peut aussi retrouver graphiquement le signe de $ax^2 + bx + c$ en s'aidant de l'allure de la parabole parmi les 6 cas possibles, suivant le signe de a et de Δ :

	Si $\Delta < 0$ aucune racine.	**Si $\Delta = 0$** une seule racine.	**Si $\Delta > 0$** deux racines x_1 et x_2.
Si $a > 0$, la parabole « est tournée vers le haut ».			
Si $a < 0$, la parabole « est tournée vers le bas ».			

5 Étudier le signe d'un trinôme de degré 2

Énoncé

Soit $k(x) = -x^2 - 3x + 6$ une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$.
Résoudre l'inéquation $k(x) < 0$.

Solution

1. Comparer le trinôme $k(x)$ à 0 revient à étudier son signe.
On cherche les racines du trinôme $-x^2 - 3x + 6$.
On calcule le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (6) = 33$.
$\Delta > 0$, donc l'équation $-x^2 - 3x + 6 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{33}}{2 \times (-1)} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

avec $x_1 > x_2$.
Le coefficient de x^2 dans $-x^2 - 3x + 6$ étant négatif,
on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
signe de $-x^2 - 3x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $k(x) < 0$ est donc :

$$\left]-\infty ; \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} ; +\infty\right[.$$

MÉTHODE

Pour déterminer le signe d'un trinôme de degré 2, il faut commencer par déterminer ses racines s'il en a.

Conseils

- Bien ranger x_1 et x_2 dans l'ordre croissant.
- Penser à contrôler le tableau de signe d'un trinôme de degré 2 par l'allure de la parabole.

26 Dresser le tableau de variation de la fonction :

a. $f(x) = x^2 + 4x - 6$ **b.** $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$

c. $k(x) = (x - 1)(x + 2)$ **d.** $h(x) = 3x^2 - 3$

28 Soit $I = [-5 ; 3]$ et f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. En déduire le minimum et le maximum de f sur I.

3. Donner les solutions sur I des (in)équations :

a. $f(x) = -10$ **b.** $f(x) = 17$

c. $f(x) < 17$ **d.** $f(x) > -20$